

Hatibovic Alen

Láncgörbe belógására vonatkozó speciális összefüggések

1. rész

A cikk a szabadvezetékes hálózat belógásával foglalkozik, a vezeték alakját láncgörbének tekintve egyedi matematikai összefüggéseket ad ferde és vízszintes felfüggesztésre vonatkozó belógások között olyan speciális esetekben, amikor a kétféle felfüggesztéshez tartozó oszlopköz hossza, valamint a két láncgörbének a paramétere is azonos. Ilyenkor a két vezetékgörbe tulajdonképpen ugyanannak a láncgörbének egy-egy részét képezi a különböző, de azonos hosszúságú intervallumokban. A kétrészes cikk 1. része a fent említett összefüggések egyikét vezeti le, mely az oszlopköz bármely pontján alkalmazható. Ezt követően a megfelelő közelítő összefüggésnek az ismertetése és kiértékelése szerepel.

Considering the shape of the conductor as a catenary, this paper deals with the sag of overhead lines and presents unique mathematical relationships between the sags of the catenary in inclined and level spans in special cases when the span length is a common datum for the two spans and both conductor curves have the same catenary parameter. Then the two conductor curves are in fact parts of one and the same catenary curve but in different intervals of the same length. The first part of the two-part paper derives one of the above mentioned relationships, which is applicable at any point of the span. Thereafter the adequate approximate relationship has been described and evaluated.

1. BEVEZETÉS

A vízszintes és ferde felfüggesztés kifejezések gyakori ismétlődése miatt a továbbiakban az alábbi rövidítések kerültek alkalmazásra a leírás egyszerűsítése végett:

vf. vízszintes felfüggesztés,
ff. ferde felfüggesztés.

A cikkben használt jelölések a következő listában szerepelnek, és részben az 1. ábrán láthatók:

$y_{vf}(x)$ vezetékgörbe egyenlete vf. esetén,
 $y_{ff}(x)$ vezetékgörbe egyenlete ff. esetén,
 $y_{fk\,vf}(x)$ felfüggesztési köz egyenesének egyenlete vf. esetén,
 $y_{fk\,ff}(x)$ felfüggesztési köz egyenesének egyenlete ff. esetén,
 $b_{vf}(x)$ belógási görbe egyenlete vf. esetén,
 $b_{ff}(x)$ belógási görbe egyenlete ff. esetén,
 $b_{vf}(i)$ belógás az oszlopköz i pontján vf. esetén,
 $b_{ff}(i)$ belógás az oszlopköz i pontján ff. esetén,
 $\Delta b(x)$ ff.-re és vf.-re vonatkozó belógások közötti eltérésének egyenlete,

ψ ferdeség.

A bemenő adatok a következők:

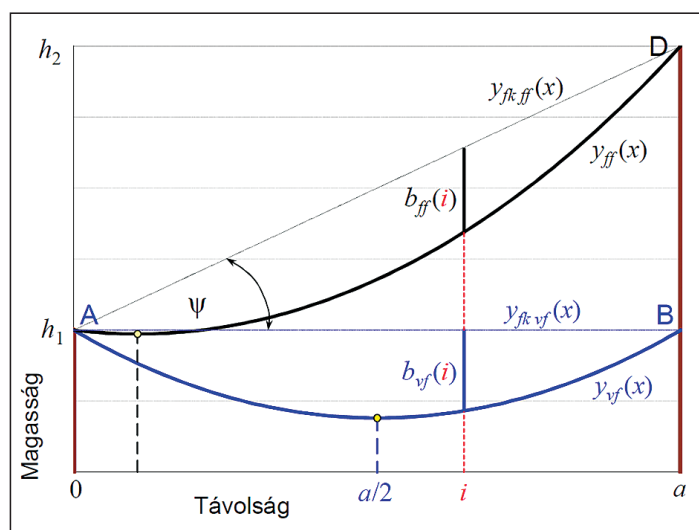
a oszlopköz hossza,
 h_1 bal oldali felfüggesztési pont magassága,
 h_2 jobb oldali felfüggesztési pont magassága,
 c láncgörbe paramétere.

A $h_1=h_2$ esetén vf.-ről, $h_1 \neq h_2$ esetén pedig ff.-ről van szó.

A cikkben szerepeltetett levezetésekhez az alábbi feltételek teljesülése szükséges:

$$a_{vf} = a_{ff} = a \quad (1)$$

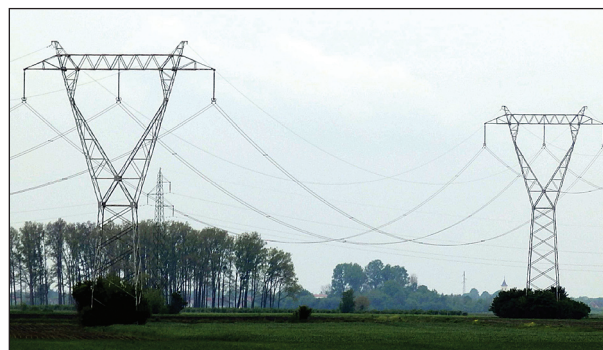
$$c_{vf} = c_{ff} = c \quad (2)$$



1. ábra Láncgörbe vízszintes és ferde felfüggesztési közben

Az 1. ábrán együtt látható vezetékgörbe (láncgörbe) vf.-i közben (AB) és ff.-i közben (AD).

A láncgörbe alapú számítást [1, 2, 3] általában a nagyfeszültségű szabadvezetékes hálózat tervezésekor alkalmazzák (2. ábra).



2. ábra Nagyfeszültségű szabadvezetékes hálózat, vízszintes felfüggesztési köz

2. ÖSSZEFÜGGÉS $b_{ff}(x)$ ÉS $b_{vf}(x)$ KÖZÖTT

2.1 $\Delta b(x)$ kifejezésének levezetése és elemzése

Tekintettel arra, hogy a láncgörbe belógása ff.-i közben többnyire nagyobb, mint a vf.-i közben, ezért az eltérés a két belógás között az alábbi alapegyenlettel van megadva, amely az oszlopköz bármely pontjára alkalmazható:

$$\Delta b(x) = b_{ff}(x) - b_{vf}(x), \quad x \in [0, a] \quad (3)$$

A $\Delta b(x)$ -nek a bemenő adatokkal való kifejezéséhez (azaz $\Delta b(a, h_1, h_2, c, x)$) a $b_{ff}(x)$ és $b_{vf}(x)$ előzetes meghatározása szükséges. Az 1. ábra alapján a $b_{ff}(x)$ a (4) egyenletből vezethető le, melyből az (5) adódik [4]:

$$b_{ff}(x) = y_{fk\,ff}(x) - y_{ff}(x), \quad x \in [0, a] \quad (4)$$

$$b_{ff}(x) = \frac{h_2 - h_1}{a} x - 2c \cdot \left[\operatorname{sh}^2 \left(\frac{a}{4c} - \frac{x}{2c} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right] - \operatorname{sh}^2 \left(\frac{a}{4c} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \quad (5)$$

Esetünkben célszerű ezt az egyenletet az alábbi alakra változtatni:

$$b_{ff}(x) = \frac{h_2 - h_1}{a} x - 2c \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2c} \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{x - a}{2c} + \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \quad (6)$$

Ebből közvetlenül meghatározható a $b_{vf}(x)$, a $h_1 = h_2$ behelyettesítésével:

$$b_{vf}(x) = 2c \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2c} \cdot \operatorname{sh} \frac{a - x}{2c}, \quad x \in [0, a] \quad (7)$$

Természetesen a (7) az alábbi alapegyenletből is levezethető, de a (6) felhasználása egyszerűbb és gyorsabb módszer.

$$b_{vf}(x) = y_{fk\,vf}(x) - y_{vf}(x), \quad x \in [0, a] \quad (8)$$

Végül a (7)-nek a (6)-ból való kivonása a keresett $\Delta b(x)$ kifejezést eredményezi, amely a megfelelő átrendezés után a következő alakot ölti:

$$\Delta b(x) = \frac{h_2 - h_1}{a} x - 4c \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2c} \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{a - x}{2c} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \quad (9)$$

A (9) kifejezés konkrét alkalmazása a 2.2 alfejezetben szerepel.

2.1.1 $\Delta b(x)$ függvény elemzése

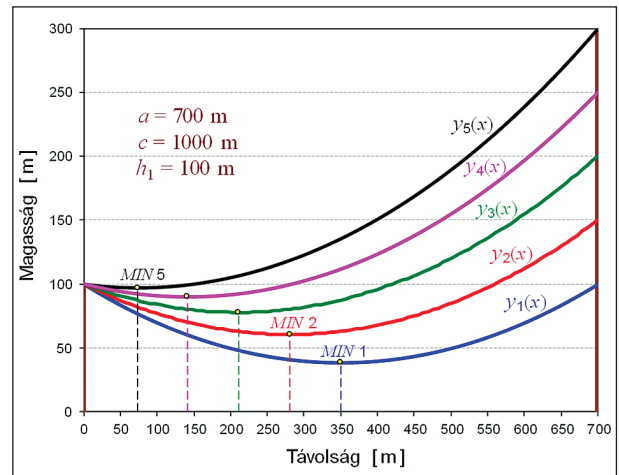
A $\Delta b(x)$ függvény elemzésével a ferdeség (ill. $\Delta h = h_2 - h_1$) változásakor jellegzetes tulajdonságai állapíthatók meg. Ezt a célt az alábbi 1. példa szolgálja, mely tartalmaz egy vezeték-görbét ($y_1(x)$) a vf -i között és még négy másikat ($y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ és $y_5(x)$) eltérő ferdeségű ff -i között (3. ábra), de mind az öt esetben az oszlopköz hossza, valamint a láncgörbe paramétere is azonos. A bal oldali oszlopon lévő felfüggesztési pont magassága mind az öt esetben azonos, míg a jobb oldali oszlopon minden következő oszlopközben nagyobb, mint az előzőben, szimulálva így a ferdeség, ill. Δh növelését. A MIN a vezeték legmélyebb pontjának [4] a jele. Az 1. táblázat a bemenő adatokat tartalmazza, a 4. ábra pedig az alábbi négy $\Delta b(x)$ görbét szemlélteti:

$$\Delta b_1(x) = b_2(x) - b_1(x), \dots, \Delta b_4(x) = b_5(x) - b_1(x) \quad (10)$$

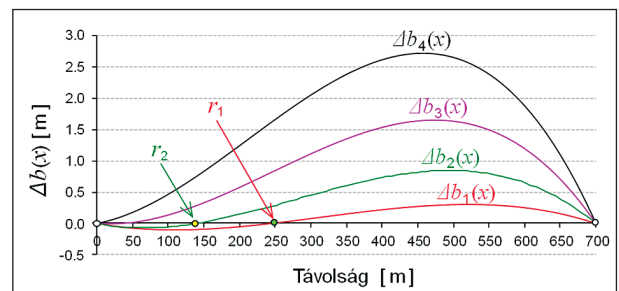
1. példa:

1. táblázat Bemenő adatok az 1. példában

Adatok	1	2	3	4	5
a [m]	700	700	700	700	700
h_1 [m]	100	100	100	100	100
h_2 [m]	100	150	200	250	300
c [m]	1000	1000	1000	1000	1000



3. ábra Vezetékgörbék az 1. példában, közös ábrán



4. ábra $\Delta b(x)$ görbék az 1. példában, közös ábrán

A 4. ábra alapján megállapítható, hogy kisebb ferdeség esetén a $\Delta b(x)$ -nek három gyöke van ($x=0$, $x=r$ és $x=a$) a $[0, a]$ intervallumban, nagyobb ferdeség esetén viszont csak kettő ($x=0$ és $x=a$). Tehát abban az esetben, hogyha ff -i köz $h_1 < h_2$ típusú, akkor a $\Delta b(x)$ függvényre a következő, (11)–(14) egyenlőségek érvényesek:

1. eset ($\Delta b(x)$ -nek három gyöke van):

$$\Delta b(x) < 0 \wedge b_{ff}(x) < b_{vf}(x) \quad \forall x \in (0, r) \quad (11)$$

$$\Delta b(x) > 0 \wedge b_{ff}(x) > b_{vf}(x) \quad \forall x \in (r, a) \quad (12)$$

$$(\Delta b)_{\max} > \operatorname{abs}((\Delta b)_{\min}) \quad (13)$$

A $\Delta b(x)$ -nek mind maximuma, mind pedig minimuma van a $(0, a)$ intervallumban. A $\Delta b(x)$ pozitív értékei dominálnak a negatív értékekkel szemben.

2. eset ($\Delta b(x)$ -nek két gyöke van):

$$\Delta b(x) > 0 \wedge b_{ff}(x) > b_{vf}(x) \quad \forall x \in (0, a) \quad (14)$$

A $\Delta b(x)$ -nek csak maximuma van, minimuma viszont nincs a $(0, a)$ intervallumban.

2.2 Új összefüggés $b_{ff}(x)$ és $b_{vf}(x)$ között

A bemenő adatokkal alkotott (9) kifejezés praktikus felhasználatához a $b_{ff}(x)$ és $b_{vf}(x)$ közötti matematikai összefüggés definiálásához. Ugyanis, a (3) kifejezésnek a (15)-re való átalakítása után lehetőség nyílik a ff -re vonatkozó belógás meghatározására a vf -re vonatkozó adott belógás alapján.

$$b_{ff}(x) = b_{vf}(x) + \Delta b(x), \quad x \in [0, a] \quad (15)$$

A (9)-nek az előző kifejezésbe való behelyettesítésével a (16) összefüggés adódik:

$$b_{ff}(x) = b_{vf}(x) + \frac{h_2 - h_1}{a} x - 4c \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2c} \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{a - x}{2c} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \quad (16)$$

A (16) összefüggés konkrét alkalmazása a következő, 2. példában kerül bemutatásra. A 2. táblázatban a vf -i közre, a 3. táblázatban pedig a ff -i közre vonatkozó bemenő adatok vannak megadva. Az a , ill. c adat ebben a két esetben azonos. (A két vezeték görbe az $y_1(x)$ és $y_5(x)$ az 1. példából melyekre a $\Delta b_4(x)$ vonatkozik.)

2. példa:

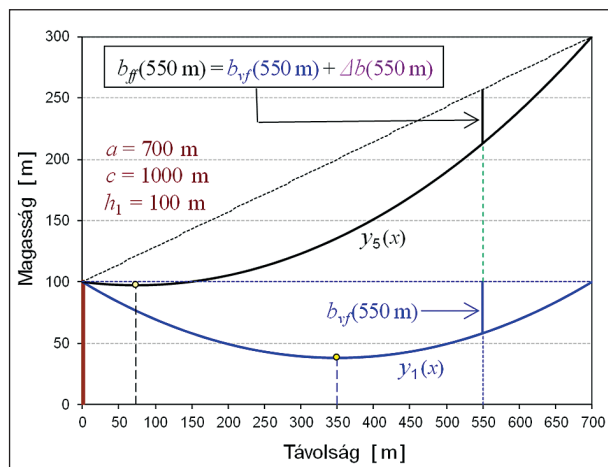
2. táblázat Bemenő adatok (vf -i köz), 2. példa

a [m]	h_1 [m]	h_2 [m]	c [m]	$b_{vf}(550 \text{ m})$
700	100	100	1000	41,811

3. táblázat Bemenő adatok (ff -i köz), 2. példa

a [m]	h_1 [m]	h_2 [m]	c [m]	$b_{ff}(550 \text{ m})$
700	100	300	1000	?

$$b_{ff}(550 \text{ m}) = 41,811 + \frac{300 - 100}{700} \cdot 550 - 4 \cdot 10^3 \cdot \operatorname{sh} \frac{550}{2 \cdot 10^3} \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{300 - 100}{2 \cdot 10^3 \cdot \operatorname{sh} \frac{700}{2 \cdot 10^3}} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{700 - 550}{2 \cdot 10^3} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{300 - 100}{2 \cdot 10^3 \cdot \operatorname{sh} \frac{700}{2 \cdot 10^3}} \right) = 44,195 \text{ m}$$



5. ábra Vezetékgörbék és belógások a 2. példában

Összegezve, a 2. példában a ff -re vonatkozó belógás a vf -re vonatkozó adott belógás alapján került meghatározásra az oszlopköz adott pontján ($x=550$ méter). Az eltérés e két belógás között a (3) alapján:

$$\Delta b(550 \text{ m}) = 44,195 \text{ m} - 41,811 \text{ m} = 2,384 \text{ m}$$

Azonban az x értéke (x_u), melyhez a $\Delta b(x)$ -nek maximuma van (azaz $\Delta b(x_u) = (\Delta b)_{\max}$), $h_1 < h_2$ esetén a (17) képlettel számítható ki. A (17) a $d(\Delta b(x))/dx=0$ egyenletből vezethető le.

$$x_u = \frac{1}{2} \cdot \left[a - c \cdot \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh}(a/2c)} \right] + c \cdot \operatorname{arch} \frac{h_2 - h_1}{2a \cdot \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh}(a/2c)} \right]} \quad \forall \quad h_1 < h_2 \quad (17)$$

A 2. példában szereplő bemenő adatok alapján az $x_u=457,361$ méter. Tehát ebben a pontban a $\Delta b_4(x)$ -nek maximuma van (Isd. 4. ábrát). Behelyettesítve az x_u -t a (9) egyenletbe kiszámítható a $(\Delta b_4)_{\max}$ értéke:

$$(\Delta b_4)_{\max} = \Delta b_4(457,361 \text{ m}) = 2,717 \text{ m}$$

Fontos emléteni, hogy $h_1 > h_2$ esetén a (17) képlet nem érvényes. Ennek oka az **area koszinusz hiperbolikus** függvény ($y=\operatorname{arch}(x)$) egyedi tulajdonsága. Amennyiben a ff -i köz $h_1 > h_2$ típusú, akkor a (17) képletet módosítani kell úgy, hogy az $\operatorname{arch}(x)$ függvényt tartalmazó tag előjele a "+" helyett legyen "-".

Megjegyzés: A cikkben található, a ff -re vonatkozó, de az $\operatorname{arch}(x)$ függvényt nem tartalmazó kifejezések mindkét típusú ff -i köz esetén ($h_1 < h_2$ és $h_1 > h_2$) egységesen érvényesek.

2.2.1 Összefüggés $b_{ff}(a/2)$ és $b_{vf}(a/2)$ között

Az $x=a/2$ a (16) összefüggés speciális esetét eredményezi, melyet a (18) alapképlet írja le, a bemenő adatok felhasználásával viszont a (19) kifejezés adódik, figyelembe véve, hogy $b_{vf}(a/2) = b_{vf \max}$.

$$b_{ff}(a/2) = b_{vf}(a/2) + \Delta b(a/2) \quad (18)$$

$$b_{ff}(a/2) = b_{vf \max} + \frac{h_2 - h_1}{2} - 4c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{4c} \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{a}{4c} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \quad (19)$$

A (19) a láncgörbe ff -re és vf -re vonatkozó belógásai közötti összefüggés, az oszlopköz felező pontján.

2.3 Meglévő összefüggés $b_{ff}(x)$ és $b_{vf}(x)$ között

A korábbi szakirodalomban gyakori a kijelentés, miszerint a ff -re vonatkozó belógás meghatározható a vf -re vonatkozó adott belógás alapján, úgy, hogy az utóbbit meg kell szorozni az $1/\cos\psi$ szorzófaktorral. Az [5] szakkönyv leírása szerint ez a módszer nemcsak az oszlopköz felező pontján alkalmazható, hanem annak bármely pontján. Ennek matematikai kifejezése az alábbi összefüggés:

$$b_{ff}(x) = \frac{1}{\cos\psi} \cdot b_{vf}(x), \quad x \in [0, a] \quad (20)$$

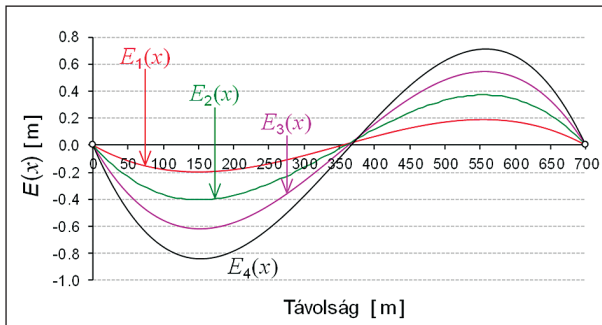
Az $1/\cos\psi$ szorzófaktor kiszámítása a (21) [6] képlettel történik, a cikk elején listázott bemenő adatokból határozható meg.

$$\frac{1}{\cos\psi} = \frac{\sqrt{a^2 + (h_2 - h_1)^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 - h_1}{a} \right)^2} \quad (21)$$

A (20) közelítő összefüggésnek tekinthető, mivel különbözik a matematikailag pontos (16) összefüggéstől. E két összefüggés ismeretében definiálható a hibafüggvény, melyet a (22) kifejezés ír le. Ennek segítségével az oszlopköz bármely pontján meghatározható a közelítő összefüggés használatával generált hibának az értéke.

$$E(x) = b_{ff}(x) - \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 - h_1}{a}\right)^2} \cdot b_{vf}(x), \quad x \in [0, a] \quad (22)$$

Felhasználva a bemenő adatokat az 1. példából, a 6. ábra négy $E(x)$ görbét mutat különböző ferdeség (ψ), azaz különböző Δh esetén.



6. ábra $E(x)$ görbék az 1. példa alapján

A 6. ábra alapján belátható, hogy az eltérés az $|E_{\min}|$ és E_{\max} között nem jelentős. Az E_{\min} , ill. E_{\max} elhelyezkedése az oszlopközben az $x=a/4$, ill. $x=3a/4$ pont közelében van, amikor $h_1 < h_2$. (Megjegyzés: $h_1 > h_2$ esetén fordított helyzet jön létre, azaz az E_{\max} , ill. E_{\min} elhelyezkedése az $x=a/4$, ill. $x=3a/4$ pont közelében van.) Továbbá, az $E(x)$ -nek két fix gyöke van, $x_1=0$ és $x_2=a$, valamint köztük egy harmadik (középső) is. Az utóbbi a ferdeség, ill. Δh növelésekor a hozzá közelebbi gyök felé tart, de az elhelyezkedése mindig az oszlopköz felező pontjának ($x=a/2$) a közelében van. A középső gyököt z -vel jelölve, a $h_1 < h_2$ esetre vonatkozóan az alábbi egyenlőtlenségek írhatók fel:

$$E(x) < 0 \quad \wedge \quad b_{ff}(x) < \frac{b_{vf}(x)}{\cos \psi} \quad \forall \quad x \in (0, z) \quad (23)$$

$$E(x) > 0 \quad \wedge \quad b_{ff}(x) > \frac{b_{vf}(x)}{\cos \psi} \quad \forall \quad x \in (z, a) \quad (24)$$

3. ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk 1. része a láncgörbe belógására vonatkozóan, az $1/\cos \psi$ szorzófaktor tartalmazó, az oszlopköz bármely pontjára alkalmazható, közelítő összefüggésről ad részletes ismertetést. A megfelelő pontos összefüggés levezetésének köszönhetően a hibafüggvény került definiálásra. Annak elemzésével egy lényeges következtetés vonható le, miszerint a közelítő összefüggés alkalmazásával eredményezett hiba előjele az oszlopköz egyik részében negatív, a másik részében pedig pozitív. A ferdeség, ill. felfüggesztési pontok közötti szintkülönbség növelésével a hiba abszolút értéke növekszik, de kisebb ferdeség esetén általában nem jelentős. A cikk folytatódik, a 2. részében a láncgörbe legnagyobb belógására vonatkozó összefüggés kerül tárgyalásra.

4. IRODALOMJEGYZÉK

- [1] CIGRÉ Green Book, *Overhead Lines*, CIGRÉ Study Committee B2, 2014.
- [2] CIGRÉ Technical Brochure No. 324, *Sag-Tension Calculation Methods for Overhead Lines*, CIGRÉ Working Group B2.12, 2007.
- [3] Grigsby L.: *Electric Power Generation, Transmission and Distribution*, Taylor & Francis Group, 2012.
- [4] Hatibovic A.: *Određivanje jednačina voda i ugiba na osnovu zadanih parametara lančanice*, BOSANSKOHERCEGOVAČKA ELEKTROTEHNIKA, No. 8, pp. 23–28, 2014.
- [5] Perneczky G.: *Szabadvezetékek feszítése*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.
- [6] Hatibovic A.: *Derivation and Analysis of the Relation between Conductor Sags in Inclined and Levelled Spans Based on Known Data of the Latter*, Conference International Grand Reseaux Électrique – CIGRÉ, Paris, Session 45, Paper B2–202, pp. 1–8, 2014.



Hatibovic Alen

okleveles villamosmérnök, doktorjelölt
 egyéni vállalkozó, tervező
 MEE-tag
 hatibovic.alen@gmail.com